

# A FAANYAG FIZIKAI-MECHANIKAI TULAJDONSÁGAINAK ANIZOTRÓPIÁJA

Előadás a Baross Gábor képzési program keretében

Szalai József  
NYME, Falpari Mérnöki Kar, MMTI

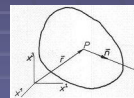
© Szalai József, 2008

## Anizotrópia és inhomogenitás

Fenomenológiai szempontból megkülönböztetünk homogén, ill. inhomogén, valamint izotrop, ill. anizotrop anyagú testeket. Ha a fizikai tulajdonságok a test minden pontjában ugyanazok *homogén*, egyébként *inhomogén* testről beszélünk. *Izotropnak* nevezzük az anyagot, ha tulajdonságai egy adott pontban függetlenek az iránytól. *Anizotrop* anyag esetén egy adott pont szűk - elemi - környezetében a fizikai tulajdonságok a pontból kiinduló irány függvényei.

Az inhomogén, anizotrop anyagú test valamely,  $t$ -vel jelölt tulajdonságát a  $t = t(\mathbf{r}, \mathbf{n})$

- függvénnyel lehet megadni, ahol
- a test valamely pontjának helyvektora,
- a pontból kiinduló irány egység-vektora.



Az anizotrópia elnevezése az an = nem, az izos = egyenlő és a tropos = irány, jelleg jelentésű görög szavak összetételének eredménye.

© Szalai József, 2008

## Tartalom

Anizotrópia és inhomogenitás

A faanyag makro- és mikroszintű anizotrópiája

Az anizotrópia felület és modellezése

A faanyag rugalmassága

A faanyag szilárdsága

A faanyag keménysége

© Szalai József, 2008

## Anizotrópia és inhomogenitás

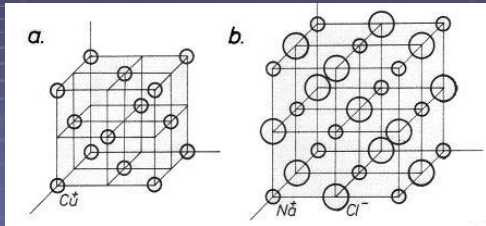
Adott pontban felvett tetszőleges két irányhoz tartozó valamely tulajdonság jellemző értékeinek hányadosa, az

$$f = \frac{t_1}{t_2} = \frac{t(\mathbf{n}_1)}{t(\mathbf{n}_2)}, \quad t_1 \geq t_2$$

mennyiség az *anizotrópia foka* vagy *mértéke*, amely adott irányhoz tartozó  $t$  tulajdonság. A két irányhoz tartozó jellemző közötti különbség mutatója (mindig a nagyobb érték kerül a számlálóba). A  $100(f-1)$  kifejezés megadja, hogy az  $n_1$  irányhoz tartozó mennyiség hány százalékkal nagyobb az  $n_2$  irányhoz tartozóénál.  $f=1$ -nél a két irány izotrop.

© Szalai József, 2008

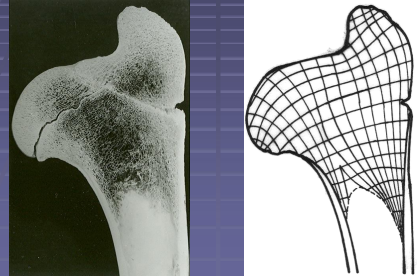
## Anizotrópia és inhomogenitás



© Székely József, 2008

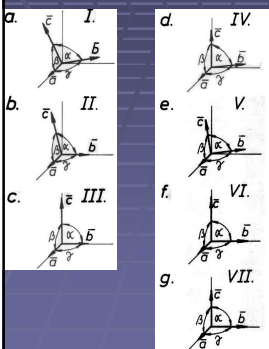
## Az anizotrópia kialakulása természetes anyagokban

Szemléletes példa erre a nagy súlyú állatok teherhordó vázát alkotó csontok szövetének szerveződése. Az ábrán egy szarvas (*Cervus Elaphus*) csipőcsontjának metszetén a szivacszerű állomány szerkezetét láthatjuk.



© Székely József, 2008

## Anizotrópia és inhomogenitás



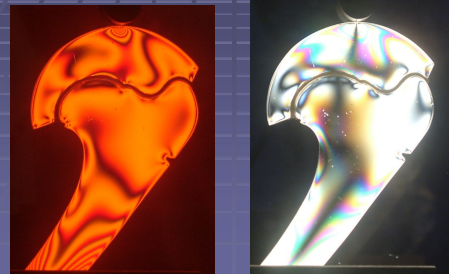
$$\vec{r} = r_0 + A\vec{a} + B\vec{b} + C\vec{c}$$

- I. *Triklin rendszer* (1.2/a. ábra)
- II. *Monoklin rendszer* (1.2/b. ábra)
- III. *Rombikus rendszer* (1.2/c. ábra)
- IV. *Hexagonális rendszer* (1.2/d. ábra)
- V. *Trigonális rendszer* (1.2/e. ábra)
- VI. *Tetragonális rendszer* (1.2/f. ábra)
- VII. *Köbös rendszer* (1.2/g. ábra)

© Székely József, 2008

## Az anizotrópia kialakulása természetes anyagokban

### Feszültségoptikai kép



© Székely József, 2008

## Az anizotrópia kialakulása természetes anyagokban

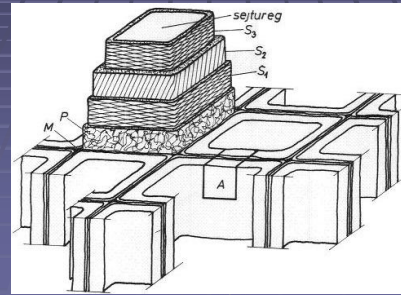
Az anizotrópia kialakulásának érdekes típusát figyelhetjük meg néhány - elsősorban lágyszaru - növényen. Itt viszonylag nagy szilárdságú szálakból álló kötegek a szar több-kevésbé homogénnek tekinthető anyagába ágyazódnak be. Az erősítő szálak most is a külső terhelésből származó feszültségi állapot legnagyobb főfeszültségének irányával párhuzamosan helyezkednek el. Az ábra ilyen növény preparált szarát mutatja (*Heracleum sphondylium*).



© Szalai József, 2008

## A faanyag makro- és mikroszintű anizotrópiája

A sejtal rétegződése



## Az anizotrópia kialakítása mesterséges anyagokban

A szerkezeti anyagokkal szemben támasztott egyre nagyobb követelmények a műszaki szakembereket arra késztették, hogy ellessék a természetől azokat a módszereket, amelyek a szerkezeti elemeket olyan merevségi és szilárdsági tulajdonsággal ruházzák fel, amelyek az adott feladat ellátása szempontjából optimálisak.

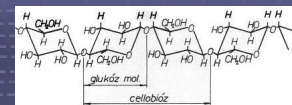
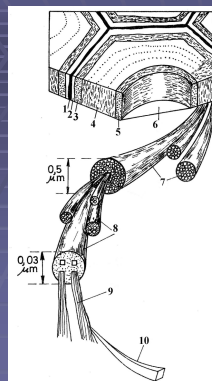
**Orientálásnak** nevezzük azt az eljárást, amely során a már eleve anizotrop részecskéket (molekulákat, egykristályokat, rostokat) valamilyen rendszer szerint (pl. a részecskék azonos tulajdonságú irányai az egész testen belül párhuzamosak) helyezzzük el egymás mellett.

**Rétegzésnél** vékony, anizotrop síklemezeket vagy héjakat erősítenek össze egymással úgy, hogy az egyes rétegek hasonló jellegű anizotrópia irányai egymással meghatározott viszonyba (pl. a rétegek azonos tulajdonságú irányai a szomszédosokkal egyforma szögeket zárnak be) kerüljenek.

**Betétezés**kor nagy szilárdságú, merev, nem hajlékony szálakat, fonatokat, szöveteket helyeznek el kisebb szilárdságú anyagba (un. mátrixba, mátrixba), amely elsősorban a betétek egymáshoz viszonyított elmozdulását gátolja meg, azaz az együttműködést biztosítja.

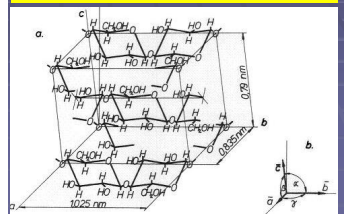
© Szalai József, 2008

## A faanyag makro- és mikroszintű anizotrópiája



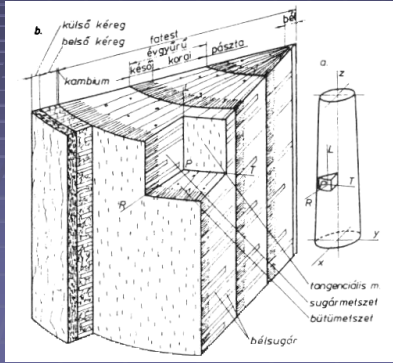
$$|\vec{a}| = 0,4275 \text{ nm}, |\vec{b}| = 0,2562 \text{ nm}, |\vec{c}| = 0,395 \text{ nm}$$

$$\alpha = \gamma = 90^\circ, \beta = 83^\circ$$



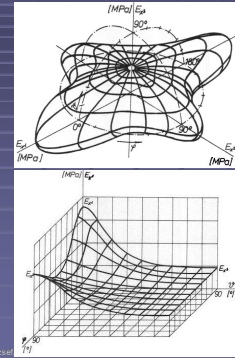
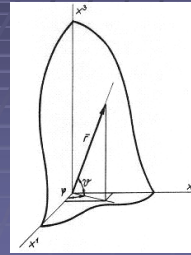
## A faanyag makro- és mikroszintű anizotrópiája

A fatest biológiai szerkezete



## Az anizotrópia felület és modellezése

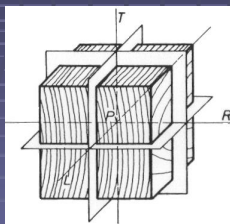
Az anizotrópia felület és modellezése



dr. Szalai József 2008

## A faanyag makro- és mikroszintű anizotrópiája

A fatest anatómiai főirányai és anatómiai fősíkjai



A három egymásra merőleges szimmetriás létezése miatt a természetes faanyagot ortogonálisan anizotropnak vagy röviden ortotropnak nevezünk.

dr. Szalai József 2008

## Az anizotrópia felület és modellezése

Egy felület általános polinom egyenlete

$$t_i x^i + t_{ij} x^i x^j + t_{ijk} x^i x^j x^k + t_{ijkl} x^i x^j x^k x^l + t_{ijklm} x^i x^j x^k x^l x^m + \dots = c$$

$i, j, k, l, m, \dots = 1, 2, 3.$

$t_i, t_{ij}, t_{ijk}, \dots$  – együtthatók (tenzorkomponensek)

$c$  – állandó. Az összefüggésben alkalmaztuk az Einstein-féle összegzési konvenciót, amely szerint az azonos alsó és felső indexek automatikus összegzést jelentenek az indexek lehetséges értékeire. Pl. a fenti egyenlet első és második tagja hagyományos írásmódban a következő alakot ölti:

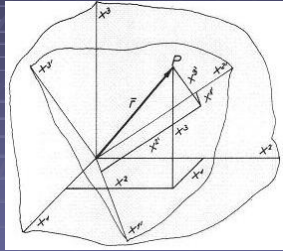
$$t_i x^i = t_1 x^1 + t_2 x^2 + t_3 x^3,$$

$$t_{ij} x^i x^j = t_{11} x^1 x^1 + t_{12} x^1 x^2 + t_{13} x^1 x^3 +$$

$$+ t_{21} x^2 x^1 + t_{22} x^2 x^2 + t_{23} x^2 x^3 +$$

$$+ t_{31} x^3 x^1 + t_{32} x^3 x^2 + t_{33} x^3 x^3.$$

### Az anizotrópia felület és modellezése



$$t_i = t_i \beta_i^j$$

$$t_{ij} = t_{ij} \beta_i^j \beta_j^k$$

$$t_{ijk} = t_{ijk} \beta_i^j \beta_j^k \beta_k^l$$

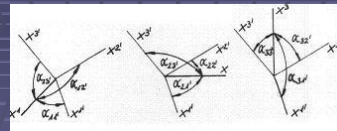
$$t_{ijkl} = t_{ijkl} \beta_i^j \beta_j^k \beta_k^l \beta_l^m$$

$$t_{ijklm} = t_{ijklm} \beta_i^j \beta_j^k \beta_k^l \beta_l^m \beta_m^n$$

$i, j, k, l, m = 1, 2, 3$   
 $i', j', k', l', m' = 1', 2', 3'$

dr. Szalai József, 2008

### Az anizotrópia felület és modellezése

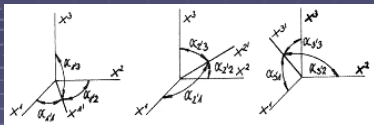


$$\beta_i^{j'} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} = \cos \alpha_{11'} & \beta_1^{2'} = \cos \alpha_{12'} & \beta_1^{3'} = \cos \alpha_{13'} \\ \beta_2^{1'} = \cos \alpha_{21'} & \beta_2^{2'} = \cos \alpha_{22'} & \beta_2^{3'} = \cos \alpha_{23'} \\ \beta_3^{1'} = \cos \alpha_{31'} & \beta_3^{2'} = \cos \alpha_{32'} & \beta_3^{3'} = \cos \alpha_{33'} \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix komponensei a vesszős koordináta-rendszerből szemlélve.

dr. Szalai József, 2008

### Az anizotrópia felület és modellezése



$$\beta_i^{j'} = \begin{bmatrix} \beta_1^{1'} = \cos \alpha_{11'} & \beta_1^{2'} = \cos \alpha_{12'} & \beta_1^{3'} = \cos \alpha_{13'} \\ \beta_2^{1'} = \cos \alpha_{21'} & \beta_2^{2'} = \cos \alpha_{22'} & \beta_2^{3'} = \cos \alpha_{23'} \\ \beta_3^{1'} = \cos \alpha_{31'} & \beta_3^{2'} = \cos \alpha_{32'} & \beta_3^{3'} = \cos \alpha_{33'} \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix komponensei a vesszőtlen koordináta-rendszerből szemlélve.

dr. Szalai József, 2008

### Az anizotrópia felület és modellezése

A fizikai-mechanikai tulajdonságok többsége olyan, hogy egy adott irányban és a vele ellentétes irányban a jellemző értéke azonos, azaz  $f(\mathbf{e}) = f(-\mathbf{e})$ , ahol  $\mathbf{e}$  - tetszőleges irány egységvektora. A tulajdonságot leképező anizotrópia felületnek szimmetriacentruma van. Ez azonban azt jelenti, hogy a felületet leíró polinom egyenletben csak páros kitevőjű tagok szerepelhetnek, mert csak ezekre áll fenn a  $f(x_1, x_2, x_3) = f(-x_1, -x_2, -x_3)$  egyenlőség. Az anizotrópia felület polinom összefüggése tehát a legáltalánosabb alakban a következő formát ölti:

$$t_i x^i x^i + t_{ijk} x^i x^j x^k x^l + t_{ijklm} x^i x^j x^k x^l x^m x^n + \dots = c,$$

$$i, j, k, l, m, n, \dots, q = 1, 2, 3$$

és  $z$  - tetszőleges pozitív páros szám.

dr. Szalai József, 2008

Erdélyi József:

FA

Hús árnyékot vet nyári délben;  
tűzzel engesztel fagyos télben;  
virágot ad a szerelmesnek,  
gyümölcsöt-makkot az éhesnek,  
ágyat az ifjú párnak,  
bölcst a kisbabának,  
koporsót-fejfát a halottnak;  
szolgál minden elevent;  
sátorfát és szelemet,  
hajót, árbot és vitorlát,  
kútágast, gémet és sudarfát,  
kútostorra vedret,

háza teknőt-csebre,  
jármot-rudat-szekeket,  
ásónyelet-gerebent,  
vesszőt a rossz gyermeknek,  
fegyvert a hadseregnek,  
asztalt-széket, hegedűt,  
kerítést és fabetűt, -  
annyi mindent ad a fa;  
úgy áll felettünk áldó kézzel,  
mint egy ősapa,  
ágán gyümölcscsel és odvában  
mézzel,  
mint ősanánk maga ...

© Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(\epsilon_{kl}) = \sigma^{ij}(0) + \left( \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} \right)_0 \epsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Ha elfogadjuk azt a - nem feltétlenül magától értetődő - feltételezést, hogy alakváltozásmentes állapotban a feszültség állapot nulla, akkor  $\sigma^i(0) = 0$ . Ilyenkor a sorbafejtett függvény részletesen kiírt alakja:

$$\begin{aligned} \sigma^i = & \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{11}} \right)_0 \epsilon_{11} + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{12}} \right)_0 \epsilon_{12} + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{13}} \right)_0 \epsilon_{13} + \\ & + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{21}} \right)_0 \epsilon_{21} + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{22}} \right)_0 \epsilon_{22} + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{23}} \right)_0 \epsilon_{23} + \\ & + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{31}} \right)_0 \epsilon_{31} + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{32}} \right)_0 \epsilon_{32} + \left( \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon_{33}} \right)_0 \epsilon_{33}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

© Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

*Rugalmas test:* a terhelés hatására megváltoztatja alakját, a terhelés megszűnésekor pedig visszanyeri eredeti alakját.

*Lineárisan rugalmas test:* lineáris a kapcsolat a feszültségi és alakváltozási tenzorkomponensek között.

Izotrop anyagnál: normál-feszültségek hatására csak hosszváltozás, nyírófeszültségek hatására csak szögváltozás lép fel.

Ani izotrop anyagnál a legáltalánosabb feltételezés az, hogy minden feszültségkomponens minden alakváltozási komponensnek függvénye.

Azaz

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(\epsilon_{kl}), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Az összefüggésnek megfelelő függvénykapcsolat konkrét formája úgy vezethető le, hogy a  $\sigma^i$  függvényt az  $\epsilon_{ij} = 0$  hely környezetében Taylor-sorba fejtsük - a kis alakváltozások feltételezésének megfelelően - az első foknál magasabb fokú tagokat elhanyagolva:

© Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

A parciális deriváltak nulla helyen számított értékei konstansok, jelöljük ezeket a következő definíció alapján:

$$\left( \frac{\partial \sigma^{ij}(\epsilon_{kl})}{\partial \epsilon_{kl}} \right)_0 = c^{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Ezzel a keresett kapcsolat konkrét alakja indexes (tenzoriális) jelölésmódban:

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

ahol

$c^{ijkl}$  - a merevségi tenzor, ill. annak komponensei.

© Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

Az anizotrop anyagok általános Hooke-törvénye mátrix-representációban:

$$[\sigma_{ij}] = [c_{ijkl}] [\varepsilon_{kl}]$$

$$[\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6, \sigma^7, \sigma^8, \sigma^9, \sigma^{10}, \sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{14}, \sigma^{15}, \sigma^{16}, \sigma^{17}, \sigma^{18}, \sigma^{19}, \sigma^{20}, \sigma^{21}, \sigma^{22}, \sigma^{23}, \sigma^{24}, \sigma^{25}, \sigma^{26}, \sigma^{27}, \sigma^{28}, \sigma^{29}, \sigma^{30}, \sigma^{31}, \sigma^{32}, \sigma^{33}] =$$

$c^{1111}$	$c^{1112}$	$c^{1113}$	$c^{1121}$	$c^{1122}$	$c^{1123}$	$c^{1131}$	$c^{1132}$	$c^{1133}$	$\varepsilon_{11}$
$c^{1211}$	$c^{1212}$	$c^{1213}$	$c^{1221}$	$c^{1222}$	$c^{1223}$	$c^{1231}$	$c^{1232}$	$c^{1233}$	$\varepsilon_{12}$
$c^{1311}$	$c^{1312}$	$c^{1313}$	$c^{1321}$	$c^{1322}$	$c^{1323}$	$c^{1331}$	$c^{1332}$	$c^{1333}$	$\varepsilon_{13}$
$c^{2111}$	$c^{2112}$	$c^{2113}$	$c^{2121}$	$c^{2122}$	$c^{2123}$	$c^{2131}$	$c^{2132}$	$c^{2133}$	$\varepsilon_{21}$
$c^{2211}$	$c^{2212}$	$c^{2213}$	$c^{2221}$	$c^{2222}$	$c^{2223}$	$c^{2231}$	$c^{2232}$	$c^{2233}$	$\varepsilon_{22}$
$c^{2311}$	$c^{2312}$	$c^{2313}$	$c^{2321}$	$c^{2322}$	$c^{2323}$	$c^{2331}$	$c^{2332}$	$c^{2333}$	$\varepsilon_{23}$
$c^{3111}$	$c^{3112}$	$c^{3113}$	$c^{3121}$	$c^{3122}$	$c^{3123}$	$c^{3131}$	$c^{3132}$	$c^{3133}$	$\varepsilon_{31}$
$c^{3211}$	$c^{3212}$	$c^{3213}$	$c^{3221}$	$c^{3222}$	$c^{3223}$	$c^{3231}$	$c^{3232}$	$c^{3233}$	$\varepsilon_{32}$
$c^{3311}$	$c^{3312}$	$c^{3313}$	$c^{3321}$	$c^{3322}$	$c^{3323}$	$c^{3331}$	$c^{3332}$	$c^{3333}$	$\varepsilon_{33}$

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

A merevségi tenzor komponensei között a feszültségi és alakváltozási tenzor szimmetriája miatt az alábbi kapcsolatok állnak fenn:

$$c^{ijkl} = c^{jikl} = c^{ijlk} = c^{jilk}$$

ami azt jelenti, hogy csak az 1,1; 1,2; 1,3; 2,2; 2,3 és 3,3 indexpárok különböznek egymástól. Az egymástól független komponensek száma e 6 elem másodszárlú ismétléses variációjaként adódik, azaz  $6^2 = 36$ . Tovább eszünkbe a rugalmas állandók száma, ha figyelembe vesszük, hogy ideálisan rugalmas anyag esetén a külső erőknek a test deformálása során végzett saját munkája a testben potenciális energiaként felhalmozódik és teljes mértékben visszanyerhető.

$$c^{ijkl} = c^{klij}$$

Ez azt jelenti, hogy a merevségi komponensek az első és második indexpárra nézve szimmetrikusak, ill. a c<sub>ijkl</sub> mátrix feltételezhetően szimmetrikus. Az eddig meghatározott 36 merevségi komponensből hatban az indexpárok cseréje nem jelent változást, mert azok azonosak. A fennmaradó 30 komponens pedig páronként megegyezik. A merevségi tenzor független komponenseinek száma tehát a legáltalánosabb esetben  $6 + 15 = 21$ .

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

Természetesen annak sincs akadálya, hogy meghatározzuk az egyenletrendszer inverzét, azaz az alakváltozási komponenseket fejezzük ki a feszültségi komponensek függvényében. Formálisan ezt írhatjuk:

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma^{kl} \quad i,j,k,l = 1,2,3,$$

ahol

$s_{ijkl}$  - az alakíthatósági tenzor, ill. komponensei, vagy mátrix alakban:

$$[\varepsilon_{ij}] = [s_{ijkl}] [\sigma^{kl}]$$

Azonnal látszik, hogy a merevségi és az alakíthatósági tenzor egymásnak inverzei:

$$[s_{ijkl}] = [c_{ijkl}]^{-1}, \quad \text{ill.} \quad [c_{ijkl}] = [s_{ijkl}]^{-1}$$

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

Az általános anizotrop Hooke-törvény mátrix-representációja (a mátrix szimmetrikus a főátlóra; összesen 21 független állandó)

$$[\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6] =$$

$c^{11}$	$c^{12}$	$c^{13}$	$c^{14}$	$c^{15}$	$c^{16}$	$\varepsilon_1$
$c^{21}$	$c^{22}$	$c^{23}$	$c^{24}$	$c^{25}$	$c^{26}$	$\varepsilon_2$
$c^{31}$	$c^{32}$	$c^{33}$	$c^{34}$	$c^{35}$	$c^{36}$	$\varepsilon_3$
$c^{41}$	$c^{42}$	$c^{43}$	$c^{44}$	$c^{45}$	$c^{46}$	$\varepsilon_4$
$c^{51}$	$c^{52}$	$c^{53}$	$c^{54}$	$c^{55}$	$c^{56}$	$\varepsilon_5$
$c^{61}$	$c^{62}$	$c^{63}$	$c^{64}$	$c^{65}$	$c^{66}$	$\varepsilon_6$

$$[s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{16}] \quad \sigma^1$$

$$[s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{24}, s_{25}, s_{26}] \quad \sigma^2$$

$$[s_{31}, s_{32}, s_{33}, s_{34}, s_{35}, s_{36}] \quad \sigma^3$$

$$[s_{41}, s_{42}, s_{43}, s_{44}, s_{45}, s_{46}] \quad \sigma^4$$

$$[s_{51}, s_{52}, s_{53}, s_{54}, s_{55}, s_{56}] \quad \sigma^5$$

$$[s_{61}, s_{62}, s_{63}, s_{64}, s_{65}, s_{66}] \quad \sigma^6$$

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

A rugalmas tenzor-komponensek kapcsolata a technikai rugalmas állandókkal

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{11}}{E_1} & \frac{\lambda_{21}}{E_2} & \frac{\lambda_{31}}{E_3} & \frac{\lambda_{41}}{G_4} & \frac{\lambda_{51}}{G_5} & \frac{\lambda_{61}}{G_6} \\ \frac{\lambda_{12}}{E_1} & \frac{\lambda_{22}}{E_2} & \frac{\lambda_{32}}{E_3} & \frac{\lambda_{42}}{G_4} & \frac{\lambda_{52}}{G_5} & \frac{\lambda_{62}}{G_6} \\ \frac{\lambda_{13}}{E_1} & \frac{\lambda_{23}}{E_2} & \frac{\lambda_{33}}{E_3} & \frac{\lambda_{43}}{G_4} & \frac{\lambda_{53}}{G_5} & \frac{\lambda_{63}}{G_6} \\ \frac{\lambda_{14}}{E_1} & \frac{\lambda_{24}}{E_2} & \frac{\lambda_{34}}{E_3} & \frac{\lambda_{44}}{G_4} & \frac{\lambda_{54}}{G_5} & \frac{\lambda_{64}}{G_6} \\ \frac{\lambda_{15}}{E_1} & \frac{\lambda_{25}}{E_2} & \frac{\lambda_{35}}{E_3} & \frac{\lambda_{45}}{G_4} & \frac{\lambda_{55}}{G_5} & \frac{\lambda_{65}}{G_6} \\ \frac{\lambda_{16}}{E_1} & \frac{\lambda_{26}}{E_2} & \frac{\lambda_{36}}{E_3} & \frac{\lambda_{46}}{G_4} & \frac{\lambda_{56}}{G_5} & \frac{\lambda_{66}}{G_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \\ \sigma^4 \\ \sigma^5 \\ \sigma^6 \end{bmatrix}$$

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

A faanyag merevségi mátrixa az anatómiai főirányok rendszerében

$$[C^6] = \begin{bmatrix} E_L \frac{1 - \nu_{RT} \nu_{TR}}{A} & E_L \frac{\nu_{RL} + \nu_{RT} \nu_{TL}}{A} & E_L \frac{\nu_{TL} + \nu_{RL} \nu_{TR}}{A} & 0 & 0 & 0 \\ E_R \frac{\nu_{LR} + \nu_{LT} \nu_{TR}}{A} & E_R \frac{1 - \nu_{RL} \nu_{LT}}{A} & E_R \frac{\nu_{TR} + \nu_{LR} \nu_{TL}}{A} & 0 & 0 & 0 \\ E_T \frac{\nu_{LT} + \nu_{RT} \nu_{LR}}{A} & E_T \frac{\nu_{RT} + \nu_{RL} \nu_{LT}}{A} & E_T \frac{1 - \nu_{LR} \nu_{RL}}{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{RT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{TL} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{LR} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{E_L E_R E_T} (1 - 2\nu_{RT} \nu_{TL} \nu_{LR} - \nu_{RT} \nu_{TR} - \nu_{TL} \nu_{LT} - \nu_{LR} \nu_{RL}) = \frac{A}{E_L E_R E_T}$$

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

A faanyag alakíthatósági mátrixa az anatómiai főirányok rendszerében

$$[S_6] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{bmatrix}$$

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

A természetes faanyag rugalmas mátrixa az anatómiai főirányok rendszerében a gyakorlatban viszonylag jól mérhető rugalmas technikai állandókkal.

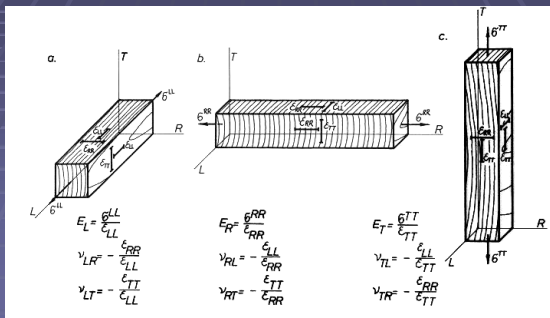
$$[S^6] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & \frac{1}{2} \left( \frac{4}{E_L^2 G_{LR}} - \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_T} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{4}{E_L^2 G_{LR}} - \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_T} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{E_L^2 G_{LR}} - \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_T} \right) & \frac{1}{E_R} & \frac{1}{2} \left( \frac{4}{E_L^2 G_{LR}} - \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_T} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{E_L^2 G_{LR}} - \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_T} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{4}{E_L^2 G_{LR}} - \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_T} \right) & \frac{1}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{4}{E_L^2 G_{LR}} - \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_T} \right) & 0 & 0 & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} \end{bmatrix}$$

dr. Szalai József, 2008



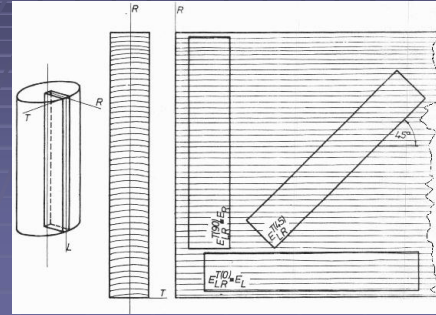
## A faanyag rugalmassága

A technikai rugalmas állandók mérése



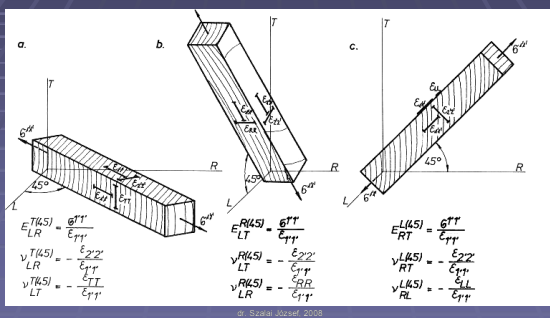
## A faanyag rugalmassága

Próbatest-kialakítás az L-R síkban



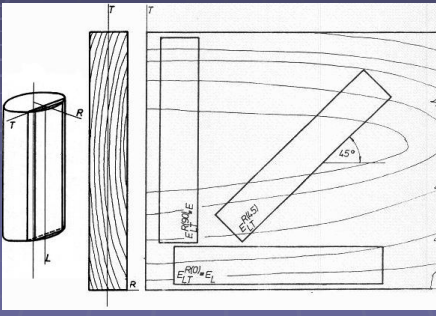
## A faanyag rugalmassága

A technikai rugalmas állandók mérése



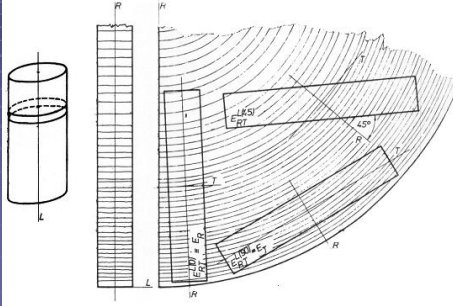
## A faanyag rugalmassága

Próbatest-kialakítás az L-T síkban

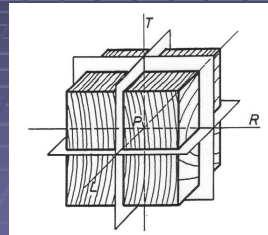


## A faanyag rugalmassága

Próbatest-kialakítás az R-T síkban



## A faanyag szilárdsága

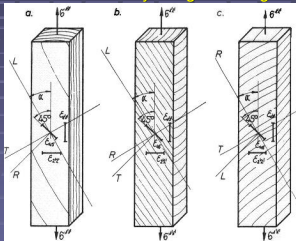


A szilárdság az anyag terheléssel szembeni ellenállása.  
Az igénybevétel jellegének megfelelően többféle szilárdságról beszélhetünk.  
Pl. húzószilárdság, nyomószilárdság, nyírószilárdság stb.

dr. Szalai József, 2008

## A faanyag rugalmassága

Az anatómiai főtípusokhoz tartozó nyírórugalmassági-modulusok mérése



$$G_{ij} = \frac{1}{2(A-B)} = \frac{\sigma_{ij}}{2(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ji})}$$

dr. Szalai József, 2008

## Problémafelvetés

- Milyen szempontok alapján kell egy adott anyagfajtára tönkremeneteli (folyási, törési) kritériumot választani?
- Tartalmazhat-e a tönkremeneteli kritériumnak megfelelő felület konkáv részeket?

dr. Szalai József, 2008

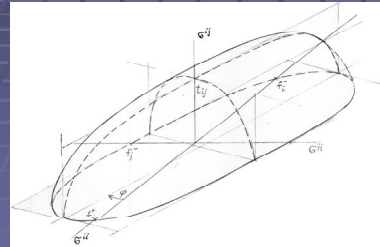
## Tönkremeneteli kritérium

- A tönkremeneteli kritérium választásának főbb szempontjai:
  - - szívós törés, rideg törés
  - - izotrop anyag, anizotrop anyag
  - - az anyagjellemzők száma és kísérleti meghatározása
  - - az ellentett irányú feszültségekhez tartozó anyagjellemzők egyezése vagy különbözősége
  - - „kényelmes” használhatóság
  - - ...

© Szalai József 2008

## TSAI-WU-féle szilárdsági kritérium

$$f_1 [t_{ij} \sigma^{ij} + t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}] = f_1 ,$$

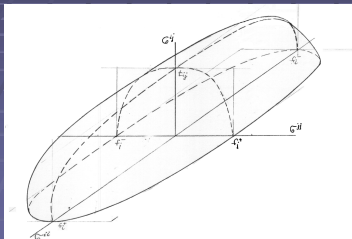


ahol  
 $f_1$  – az anyag húzószilárdsága az 1-es irányban,  
 $t_{ij}$  – a Tsai-Wu-féle kétdimenziós szilárdsági tenzor,  
 $t_{ijkl}$  – a Tsai-Wu-féle négydimenziós szilárdsági tenzor.

© Szalai József 2008

## von MISES-féle tönkremeneteli elmélet

$$f_1 [t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}] = f_1 ,$$

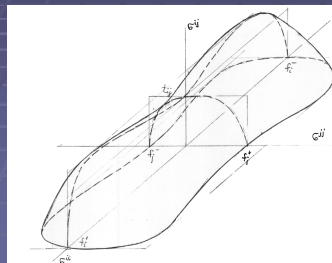


ahol  
 $f_1$  – az anyag húzószilárdsága az 1-es irányban,  
 $t_{ijkl}$  – a von Mises-féle tönkremeneteli tenzor komponensei ( $i,j,k,l = 1,2,3$ ).

© Szalai József 2008

## ASKENAZI-féle szilárdsági kritérium

$$[t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}] = \sqrt{I_1^2 - I_2} ,$$



- ahol
- $\sigma_i = \sigma^i$  - a ható feszültségi állapot,
- $I_1$  és  $I_2$  - az első és második feszültségi invariáns,
- $t_{ijkl}$  - az Askenazi-féle szilárdsági tenzor.

© Szalai József 2008

## A kiértékelés módszere

von MISES:  $t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = 1$

TSAI-WU:  $t_{ij} \sigma^{ij} + t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = 1$

ASKENAZI  $t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = \sqrt{|I_1^2 - I_2|}$

dr. Szalai József, 2008

## A kiegészítő munka

Ha az alakváltozási diagram egészen a tönkremenetelig lineárisnak tekinthető, a törésig felhalmozott kiegészítő rugalmas potenciál:

$$U^* = \frac{1}{2} s_{2222} \sigma^{22} \sigma^{22} = \frac{1}{2E_R} \sigma^{RR} \sigma^{RR},$$

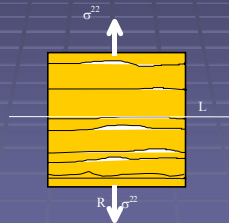
ahol  $s_{2222}$  - az alakíthatósági (deformálhatósági) tenzor eleme,

$E_R$  - a faanyag radiális irányú rugalmassági modulusza.

dr. Szalai József, 2008

## A törésig végzett kiegészítő munka

Anizotrop hasáb terhelése



dr. Szalai József, 2008

## A kiegészítő munka

Forgassuk el a hasábot (vagy a normál feszültséget) 90°-kal. Ebben az esetben a lineáris feszültségi állapot egyetlen nem nulla feszültsége:

$$\sigma^{11} = \sigma^{LL} = \sigma^{RR} = f_R,$$

ami nem okoz tönkremenetelt, hiszen anizotrop anyagnál

$$f_L > f_R,$$

ahol

$f_L$  és  $f_R$  - a faanyag húzószilárdsága rost és radiális irányban.

dr. Szalai József, 2008

## A kiegészítő munka

Növeljük meg egyenletesen a  $\sigma^{11}$  feszültség értékét, és legyen a tönkremenetel pillanatában

$$\sigma^{11} = k \sigma^{RR} .$$

A kiegészítő rugalmas potenciál a tönkremenetel pillanatában:

$$U'' = \frac{1}{2} s_{1111} \sigma^{11} \sigma^{11} = \frac{1}{2E_L} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR} .$$

ahol

$s_{1111}$  - az alakíthatósági (deformálhatósági) tenzor eleme

$E_L$  - a faanyag rostirányú rugalmassági modulusza.

dr. Szalai József, 2008

## A von Mises-féle tönkremeneteli elmélet

Esetünkben:

$$t_{2222} \sigma^{22} \sigma^{22} = 1 ,$$

$$t_{1111} \sigma^{11} \sigma^{11} = t_{1111} k^2 \sigma^{22} \sigma^{22} = 1 .$$

A két összefüggés összehasonlításából adódik:

$$k^2 = \frac{t_{2222}}{t_{1111}} = \frac{f_L^2}{f_R^2} .$$

dr. Szalai József, 2008

## A kiegészítő munka egyenlőségének következménye

Ha azzal a feltételezéssel élünk, hogy az anizotróp anyag akkor megy tönkre, ha a fajlagos kiegészítő potenciál elér egy bizonyos, az anyagra jellemző értéket, akkor a két terhelési esetben felhalmozott kiegészítő munka megegyezik. Azaz

$$k = \sqrt{\frac{E_L}{E_R}} .$$

dr. Szalai József, 2008

## A rugalmas és szilárdsági állandók közötti kapcsolat

A feszültségnövelő tényező összehasonlításával:

$$\frac{f_L}{f_R} \sqrt{\frac{E_R}{E_L}} = 1 .$$

A Tsai-Wu-elmélet esetén:

$$\frac{E_L}{E_R} \frac{f_R^+ f_R^+}{f_L^+ f_L^-} + \sqrt{\frac{E_L}{E_R} \left( \frac{f_R^+}{f_L^+} - \frac{f_R^-}{f_L^-} \right)} = 1 .$$

dr. Szalai József, 2008

## Az Askenazi-elmélet

A két terhelési esetnek megfelelő összefüggések:

$$\left( t_{2222} \sigma^{22} \sigma^{22} \right)^2 = \left( \sigma^{22} \right)^2 = \frac{2U^*}{S_{2222}},$$

$$\left( t_{1111} k^2 \sigma^{22} \sigma^{22} \right)^2 = k^2 \left( \sigma^{22} \right)^2 = \frac{2U^{**}}{S_{1111}}.$$

Innen

$$U^* = \frac{1}{2} \frac{f_R^2}{E_R}, \quad U^{**} = \frac{1}{2} \frac{f_L^2}{E_L}.$$

© Szalai József, 2008

## A normalitás és konvexitás tétele

A normalitás tétele: az alakváltozás-növekmény vektora merőleges a feszültségtérben az anyagtörvény által meghatározott felületre.

Drucker-féle anyagstabilitási posztulátum: az anyag egy terhelési ciklusban addig viselkedik stabilan, amíg a

$$d\varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} > 0$$

reláció fennáll,

$d\varepsilon$  – az elemi alakváltozási állapot növekmény ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  
 $d\sigma$  – az elemi feszültségi állapotnövekmény ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

© Szalai József, 2008

## Az Askenazi-elmélet

A kettő hányadosa:

$$\frac{U^{**}}{U^*} = \frac{E_R}{E_L} \left( \frac{f_L}{f_R} \right)^2.$$

Valamilyen fenyő fajra jellemző fiktív adatokkal, amelynél  $E_L = 10000$  MPa,  $E_R = 1000$  MPa,  $f_L = 100$  MPa,  $f_R = 5$  MPa:

$$\frac{U^{**}}{U^*} = \frac{1000}{10000} \left( \frac{100}{5} \right)^2 = 40,$$

azaz rostirányban tönkremenetelig terhelve 40-szer akkora fajlagos kiegészítő rugalmas potenciál halmozódik fel, mint sugár irányú tönkremenetelnél.

© Szalai József, 2008

## A normalitás és konvexitás tétele

A normalitás tétele és az anyagstabilitási posztulátum együttesen azzal a következménnyel jár, hogy a különböző anyag-törvényeknek megfelelő, a feszültségtérben értelmezett felületek kívülről nézve csak konvexek lehetnek.

© Szalai József, 2008

## Ideálisan rugalmas anyag

Lineárisan rugalmas anyag esetén az  $\Omega$  kiegészítő rugalmas potenciál a feszültségek pozitív definit kvadratikus függvénye:

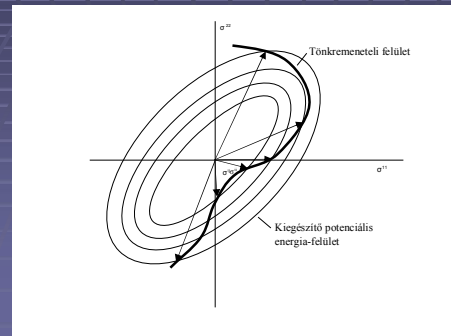
$$\left( t_{1111} k^2 \sigma^{22} \sigma^{22} \right)^2 = k^2 (\sigma^{22})^2 = \frac{2U^*}{s_{1111}}$$

ahol

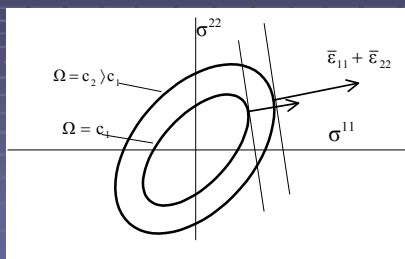
$s_{ijkl}$  – az anizotrop anyag alakíthatósági tenzora ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ).

© Szalai József 2008

## Rugalmas-rideg anyag tönkremeneteli felülete

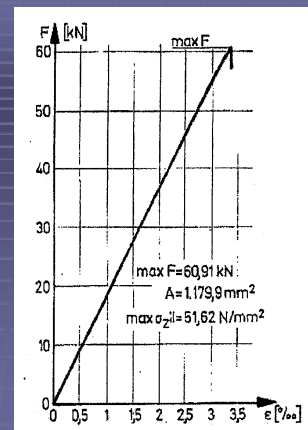


A kiegészítő energiasűrűség felülete lineárisan rugalmas anyag esetén a kétdimenziós feszültségtérben.

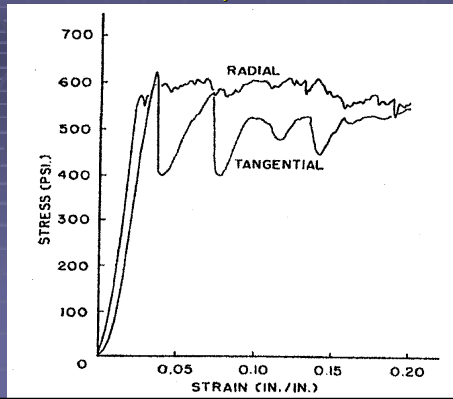


© Szalai József 2008

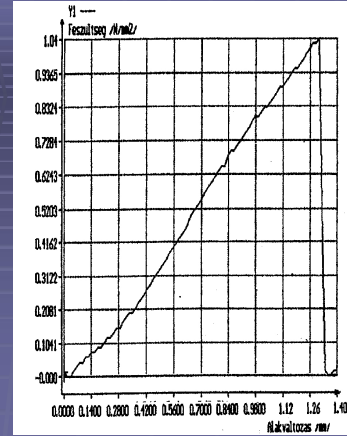
Jegyenye-fenyő jelleggörbéje húzásnál rostirányban irányban



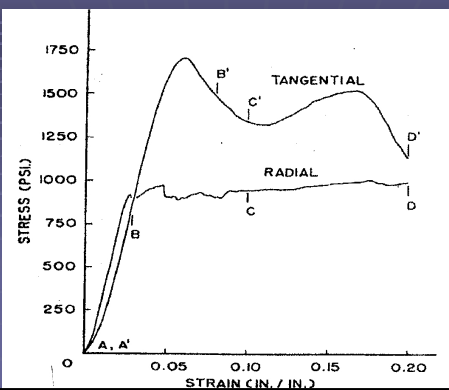
Duglász-fenyő jelleggörbéje nyomásnál radiális és tangenciális irányban



Erdei-fenyő jelleggörbéje húzásnál rostra merőleges irányban



Jegenye-fenyő jelleggörbéje nyomásnál radiális és tangenciális irányban



### A technikai szilárdságok teljes rendszere

- normálszilárdságok az anatómiai főirányokban és az anatómiai fősíkok szögfelezőinek irányában
- nyírőszilárdságok az anatómiai fősíkokban, ha a nyírófeszültség hatásvonala párhuzamos valamelyik anatómiai főtengellyel
  - diagonális nyírőszilárdságok
- két, egymásra merőleges irányú, azonos nagyságú normálfeszültséghez tartozó szilárdság

$$\begin{aligned}
 & f_L^+, f_L^-, f_R^+, f_R^-, f_T^+, f_T^-, f_{LR}^{T(45)+}, f_{LR}^{T(45)-}, f_{LT}^{R(45)+}, f_{LT}^{R(45)-}, f_{RT}^{L(45)+}, f_{RT}^{L(45)-}, \\
 & t_{LR}, t_{RL}, t_{LT}, t_{TL}, t_{RT}, t_{TR}, \\
 & t_{LR}^{T(45)+}, t_{LR}^{T(45)-}, t_{LT}^{R(45)+}, t_{LT}^{R(45)-}, t_{RT}^{L(45)+}, t_{RT}^{L(45)-}, \\
 & f_{LR}^+, f_{LR}^-, f_{LT}^+, f_{LT}^-, f_{RT}^+, f_{RT}^-
 \end{aligned}$$

dr. Szalai József, 2008



## A technikai szilárdságok minimumrendszere

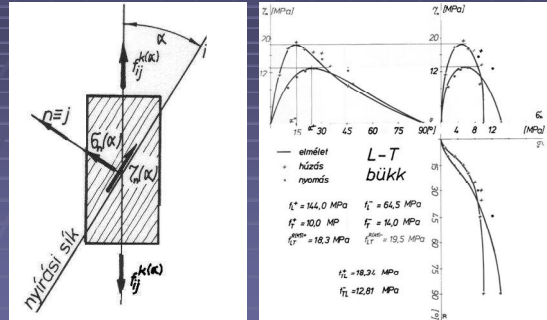
- normálzilárdságok az anatómiai főirányokban és az anatómiai fősíkok szögfelezőinek irányában, mérés
- nyírőzilárdságok az anatómiai fősíkokban, ha a nyírófeszültség hatásvonala párhuzamos valamelyik anatómiai főtengellyel, közvetett módszer, számítás

$$f_{L}^{+}, f_{L}^{-}, f_{R}^{+}, f_{R}^{-}, f_{T}^{+}, f_{T}^{-}, f_{LR}^{T(45)+}, f_{LR}^{T(45)-}, f_{LT}^{R(45)+}, f_{LT}^{R(45)-}, f_{RT}^{L(45)+}, f_{RT}^{L(45)-},$$

$$t_{RL}, t_{TL}, t_{RT} \equiv t_{TR}$$

dr. Szalai József, 2008

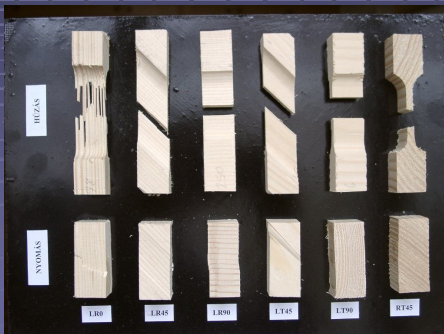
## A nyírőzilárdság közvetett meghatározása



dr. Szalai József, 2008

## Jegenyefenyő húzó- és nyomó-szilárdságának meghatározása

Próbatestek és törésképek



## A lucfenyő szilárdságának statisztikai jellemzői

Típus	Lucfenyő						Árnyéktartalom	0,46 g/cm <sup>3</sup>
	hossz							
	LR0	LR45	LR90	LT45	LT90	RT45		
Elemcsám:	315	292	302	294	330	311	Szabó	
Középérték	63,02	9,15	5,92	6,06	3,47	4,91	MPa	
Standard	15,00	2,62	1,670	1,39	1,05	0,83	MPa	
Relatív szórási	23,62	20,59	20,18	22,68	30,12	20,61	%	
Férdesség:	-0,18947	0,08199	0,25941	0,39650	-0,05855	0,13022	-	
Caucososság:	-0,49050	0,73943	-0,44892	-0,34211	-0,64204	0,05855	-	
Elosztási jellege:	Weibull	Weibull	Weibull	Weibull	normal	normal	-	
Signifikanciaszint:	31,10	12,8	0,81	31,18	0,25	64,53	%	
Normatív érték (5%)	37,67	4,73	3,36	3,00	1,75	2,85	MPa	
Alap érték (igermia 50%)	37,10	4,82	3,16	3,55	1,55	2,48	MPa	
Felső érték (igermia 90%)	38,15	5,34	3,83	3,61	1,99	2,92	MPa	
Határérték (0,1%)	17,76	1,68	2,07	1,28	0,24	1,46	MPa	
Alap érték (igermia 50%)	15,98	1,36	1,81	1,15	0,98	1,18	MPa	
Felső érték (igermia 90%)	19,34	2,00	2,34	1,41	0,98	1,72	MPa	

dr. Szalai József, 2008

**A lucfenyő szilárdságának statisztikai jellemzői**

**Lucfenyő**

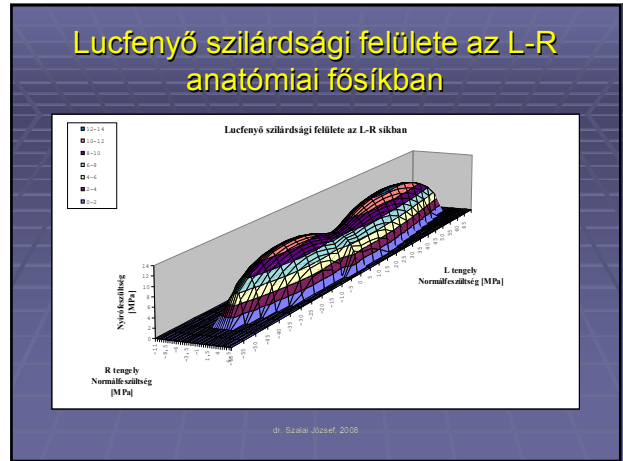
Fajta: Átlag szilárdság: 0,46 g/cm<sup>3</sup>

Nemességpragm: 12%

Ígénybevitel: nyomás

	LR0	LR40	LR90	LT45	LT90	RT40	
Elemézőm:	319	325	291	309	274	205	statik.
Közéérték:	49,24	8,68	3,49	12,31	7,05	3,67	MPa
Szórás:	8,87	2,32	0,78	2,18	1,44	0,76	MPa
Relatív szórás:	17,80	25,94	22,37	16,85	20,47	20,75	%
Ferdeség:	0,05621	0,23473	0,24790	0,51654	0,01665	0,20691	-
Csúcsság:	0,54258	0,49352	0,74031	0,08378	0,23271	0,01458	-
Elosztás jellege:	Weibull	Weibull	Weibull	Weibull	normal	Weibull	-
Szignifikanciaszint:	26,99	2,70	0,06	1,39	2,45	2,19	%
Normatív érték (5%):	34,73	5,02	2,13	9,00	4,68	2,36	MPa
Alsó határ (gamma 99%):	14,21	4,07	2,11	9,37	4,37	2,30	MPa
Felső határ (gamma 99%):	55,25	5,00	2,15	9,32	4,99	2,39	MPa
Határérték (0,1%):	36,30	1,84	1,02	4,80	2,59	1,32	MPa
Alsó határ (gamma 99%):	21,90	1,01	0,94	4,71	2,10	1,22	MPa
Felső határ (gamma 99%):	27,42	1,78	1,10	5,05	2,58	1,42	MPa

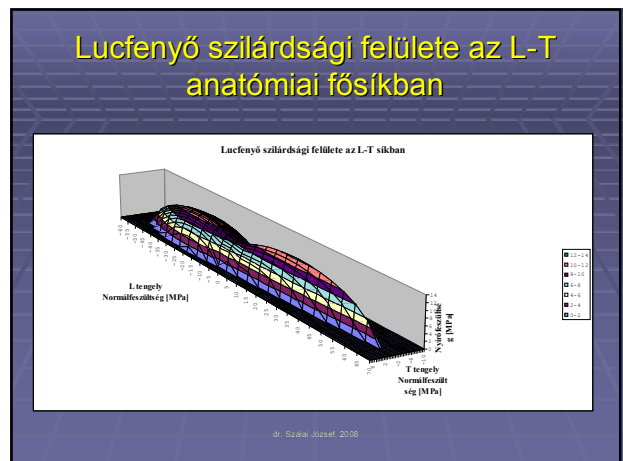
dr. Szalai József, 2008



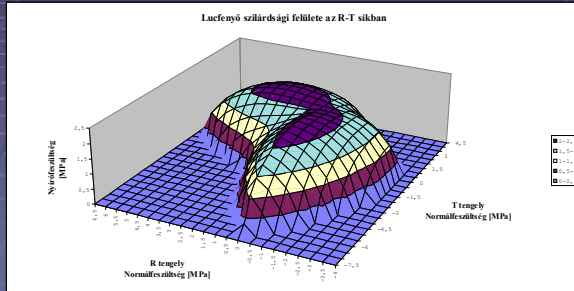
**A lucfenyő nyíró-szilárdságának statisztikai jellemzői**

<b>Közéérték:</b>	9,324217676	8,504789072	2,023021861	MPa
<b>Szórás:</b>	4,008674366	2,159437638	0,582262301	MPa
<b>Relatív szórás:</b>	42,99207189	25,39084297	28,78180965	%
<b>Ferdeség:</b>	0,275481699	0,060601595	0,043201915	-
<b>Csúcsság:</b>	-	-	-	-
<b>Elosztás jellege:</b>	Pearson III.	Pearson III.	Pearson III.	-
<b>Szignifikanciaszint:</b>	-	-	-	%
<b>Normatív érték (5%):</b>	2,95	4,67	0,951568	MPa
<b>Alsó határ (gamma 99%):</b>	2,547582153	4,488566842	0,900676387	MPa
<b>Felső határ (gamma 99%):</b>	3,352417847	4,851433158	1,002459613	MPa
<b>Határérték (0,1%):</b>	-1,6	1,7253	0,15	MPa
<b>Alsó határ (gamma 99%):</b>	-2,569055028	1,246844244	0,019636895	MPa
<b>Felső határ (gamma 99%):</b>	-0,630944972	2,203755756	0,280363105	MPa

dr. Szalai József, 2008



## Lucfenyő szilárdsági felülete az R-T anatómiai fősíokban



© Szalai József, 2008

## A faanyag keménysége

$$[h_{ijkl}] = \begin{bmatrix} h_{LLLL} & h_{LLRR} & h_{LLTT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{RRLL} & h_{RRRR} & h_{RRTT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{TTLL} & h_{TTRR} & h_{TTTT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{RTTR} & h_{TRRT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{RTTR} & h_{TRRT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{TLTL} & h_{LTTL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{TLTL} & h_{LTTL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{LRLR} & h_{RLLR} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{LRLR} & h_{RLLR} \end{bmatrix}$$

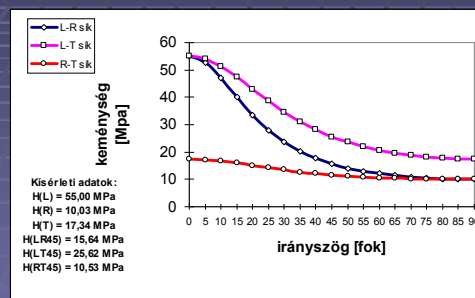
© Szalai József, 2008

## A faanyag keménysége

A keménység, amely azt az ellenállást jelenti, amelyet az anyag idegen testek behatolásával szemben fejt ki, a faanyag esetében is igen fontos tulajdonság. A faanyag keménysége számtalan anyag- és állapotjellemző függvénye. A faanyag anizotróp anyag, mint minden fizikai-mechanikai jellemzője, így keménysége is függ a behatolás irányának az anatómiai főirányokhoz viszonyított helyzetétől, az orientációtól. Jelenleg a szakirodalomban szinte csak az anatómiai főirányokhoz tartozó keménységekről található adat. A szilárdsággal kapcsolatos analógiák alapján feltételezhető, hogy a keménység egy négy dimenziós tenzonnal írható le. Ortogonális anizotrópia esetén ennek az ún. keménységi tenzornak kilenc független komponense van, melyből elvi megfontolások alapján három - a nyírószilárdsághoz kapcsolódók - nulla értékű. A fennmaradó hat nem nulla komponens hat technikai keménység meghatározott függvényeként fejezhető ki. Ezek az anatómiai főirányokhoz és az anatómiai fősíkok szögfelezőinek irányához tartozó keménységek, melyek ismeretében tetszőleges irányhoz tartozó keménység a négydimenziós tenzor transzformációs szabályának felhasználásával számítható. Kísérleti vizsgálatainkban először meghatároztuk egy fajon az elmélet alkalmazhatóságához szükséges hat technikai keménységet. Az elmélet helyességét a tetszőleges irányokban mért valódi keménységekkel ellenőrizhetjük.

© Szalai József, 2008

## A faanyag keménysége



Kísérleti adatok:  
 $H(L) = 55,00 \text{ MPa}$   
 $H(R) = 10,03 \text{ MPa}$   
 $H(T) = 17,34 \text{ MPa}$   
 $H(LR45) = 15,64 \text{ MPa}$   
 $H(LT45) = 25,62 \text{ MPa}$   
 $H(RT45) = 10,53 \text{ MPa}$

© Szalai József, 2008

**Köszönöm megtisztelő  
figyelmüket**

© Székely József 2008